Matrices Positivas Definidas

Arsenio Cornejo Jordán
Dept. de Matemática
Universidad Nacional de Panamá

Junio 4, 2010

Temas

Producto Interno

Definición

Sea E un espacio vectorial sobre R. Se llama producto interno sobre E a toda función $\langle u|v\rangle : E \times E \to \mathbb{R}$ que satisfaga los siguientes axiomas:

$$\text{[Axioma de Simetría]} \quad \forall u, v \in E, \langle u|v\rangle = \langle v|u\rangle \tag{1}$$

$$\text{[Axioma de Aditividad]} \quad \forall u, v, w \in E, \langle u+v|w\rangle = \langle u|w\rangle + \langle v|w\rangle \tag{2}$$

$$\text{[Axioma de Homogeneidad]} \quad \forall u, v \in E, r \in \mathbb{R}, \langle ru|v\rangle = r\langle u|v\rangle \tag{3}$$

$$\text{[Axioma de Positividad]} \quad \forall u \in E, \langle u|u\rangle \geq 0; \langle u|u\rangle = 0 \iff u = 0 \tag{4}$$

Notación y Observaciones

Notación

Si $\langle . | . \rangle$ es un producto interno sobre un espacio vectorial E, diremos que la estructura $(E, \langle . | . \rangle)$ es un espacio con producto interno.

Notación y Observaciones

Notación

Si $\langle .|. \rangle$ es un producto interno sobre un espacio vectorial E, diremos que la estructura $(E, \langle .|. \rangle)$ es un espacio con producto interno.

Observación

Del axioma de homogeneidad se tiene que $\langle 0|v \rangle = 0$, para todo $v \in E$. En consecuencia, el axioma de positividad puede quedar en la forma

$$\forall u \in E, \langle u|u \rangle \geq 0; \langle u|u \rangle = 0 \Longrightarrow u = 0 \tag{5}$$

Temas

Producto Interno sobre $\mathbb{R}^n$

Recordemos que el producto interno usual en $\mathbb{R}^n$ está dado por

$$\langle u|v\rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i \tag{6}$$

Si x, y son las matrices de coordenadas de los vectores u, v, con respecto a la base natural, podemos afirmar que

$$\langle u|v\rangle = x^T y \tag{7}$$

Por ejemplo, si $u = (1, -3, 2)$,$v = (3, 1, 2)$, entonces

$$\begin{aligned}\langle u|v\rangle &= \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= 4\end{aligned}$$

Temas

Producto Interno y Matrices

El producto interno usual en $\mathbb{R}^n$ tiene la forma

$$\langle u|v\rangle = x^T A y \tag{8}$$

en donde A es la matriz identidad.
La cuestión que planteamos es la siguiente:

¿Qué condiciones debe satisfacer una matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$, para que

$$\langle u|v\rangle = x^T A y \tag{9}$$

sea un producto interno sobre $\mathbb{R}^n$?

Para que la matriz A genere un producto interno, debe ser cierto que:

$$\text{[Axioma de Simetría]} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, x^T A y = y^T A x \tag{10}$$

$$\text{[Axioma de Aditividad]} \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}^n, (x+y)^T A z = x^T A z + y^T A z \tag{11}$$

$$\text{[Axioma de Homogeneidad]} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, r \in \mathbb{R}, (rx)^T A y = r(x^T A y \tag{12}$$

$$\text{[Axioma de Positividad]} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, x^T A x \geq 0; x^T A x = 0 \Longrightarrow x = 0 \tag{13}$$

Observe que, las propiedades (11) y (12) pueden establecerse apelando a las propiedades de las operaciones con matrices y la operación de trasponer matrices.

Deduzcamos qué condición debe satisfacer A para que (10) sea cierta:

$$\begin{aligned} x^T A y &= (x^T A y)^T \\ &= y^T A^T (x^T)^T \\ &= y^T A^T x \\ &\stackrel{?}{=} y^T A x \end{aligned}$$

El cálculo realizado muestra que A debe ser una matriz simétrica si deseamos que el producto interno correspondiente sea simétrico.

Finalmente, para que dicho producto interno sea positivo es necesario que la matriz sea positiva definida en el sentido de la siguiente

Definición

Diremos que una matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ es positiva definida si:

1. $\forall x \in \mathbb{R}^n, x^T Ax \geq 0$
2. $\forall x \in \mathbb{R}^n, x^T Ax = 0 \Longrightarrow x = 0$

Temas

Consideremos la matriz $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$. Sea $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$.

Se tiene:

$$\begin{aligned} x^T Bx &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 \\ -x_2 + x_3 \end{bmatrix} \\ &= 2x_1 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_3^2 \\ &= x_1^2 + x_3^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 \end{aligned}$$

La forma obtenida muestra que, en efecto, B es PD.

Temas

La matriz $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ es PD puesto que, para cualquier $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ se tiene

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + 3x_2^2$$

Esto muestra que una matriz en la que ocurran números no positivos puede ser positiva definida.

En efecto, si $A \in M_n(\mathbb{R})$ es PD y $x \in \mathbb{R}^n$, de $Ax = 0$ resulta $x^T Ax = 0$; como A es PD se deduce que x = 0. Esto demuestra que A es invertible.

Temas

Sea A una matriz simétrica. Entonces, A es positiva definida si y sólo si todos sus menores principales son positivos.
Por ejemplo, los menores principales líderes de la matriz
$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ son: det([2] = 2, $det(\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, y

$det\left(\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}\right) = 4$ Como todos son positivos, B es PD.

Sea A una matriz simétrica. Entonces, A es positiva definida si y sólo si todos sus valores propios son positivos.
Por ejemplo, los valores propios de la matriz $H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ son λ_1 = 0.172, λ_2 = 1 y λ_3 = 5.828. La matriz H es SPD puesto que todos sus valores propios son positivos.

Muchas gracias por sus aplausos