Diagonalización y Simetría

Prof. Arsenio Cornejo Jordán*

julio, 2010

Resumen

La determinación de los valores y vectores propios de operadores lineales facilita su caracterización geométrica; en particular, podemos determinar si un operador lineal corresponde a una simetría sobre un plano en base al estudio de tales elementos.

1. Introducción

Consideremos un plano en el espacio.

La simetría con respecto a dicho plano de un punto P es el punto Q tal que el plano es perpendicular al segmento $\overline{PQ}$ en su punto medio.

Por ejemplo, en $\mathbb{R}^3$, el simétrico de un punto $P(x, y, z)$ con respecto al plano XY es $Q(x, y, -z)$.

No es obvio cómo determinar la simetría $S_\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con respecto a un plano π en el espacio, a partir de la ecuación de dicho plano.

En las próximas secciones sugerimos el método.

2. Simetrías como Operadores

En el caso de que el plano pase por el origen de coordenadas, podemos afirmar que la transformación de simetría con respecto al plano es un operador lineal T sobre $\mathbb{R}^3$; en tal caso, es posible elegir una base $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que:

(I) $S = \{v_1, v_2\}$ es una base del plano y $T(v_1) = v_1$, $T(v_2) = v_2$

(II) v_3 es ortogonal al plano, y $T(v_3) = -v_3$

Por otro lado, podemos afirmar que si, dado un operador T, existe una base de $\mathbb{R}^3$ que satisface las condiciones mencionadas, entonces dicho operador es una simetría con respecto al plano generado por $S = \{v_1, v_2\}$.

3. Diagonalización y Simetría

En la sección anterior llegamos a la conclusión de que si tenemos un operador T diagonalizable con valores característicos $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ tal que el espacio característico S asociado a $\lambda_1 = 1$ es de dimensión 2, y el asociado a $\lambda_2 = -1$ es ortogonal a S, entonces T debe ser la simetría con

*http:www.acjordan.com; email: nuevalog2004@yahoo.com

respecto al plano S.

Por consiguiente, el análisis de los valores y vectores propios del operador nos permitirá decidir si es una simetría con respecto a un plano.

Consideremos el siguiente problema:

Problema 1. La matriz de un operador lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ está dada por

$$A = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \tag{1}$$

Determine si es una simetría con respecto a una plano dado. ¿Cuál es dicho plano?

Solución: El lector puede determinar que el polinomio característico de la matriz es $pol_A(x) = (x-1)^2(x+1)$. Se tienen dos valores característicos $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$. Al determinar bases para los espacios característicos correspondientes se tiene:

(I) El espacio característico asociado a $\lambda_1 = 1$, es el conjunto de soluciones del sistema homogéneo con matriz de coeficientes: $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$

Al reducirla (operaciones elementales de fila) se deduce una base $B = \{v_1, v_2\}$ para dicho espacio en donde $v_1 = (-1, 1, 0)$, $v_1 = (-2, 0, 1)$.

(II) Por otro lado, el espacio característico asociado a $\lambda_1 = -1$, es el conjunto de soluciones del sistema homogéneo con matriz de coeficientes: $\begin{bmatrix} -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$ Al reducirla se deduce una base $\{v_3\}$, $v_3 = (1, 1, 2)$ de dicho espacio característico. Además, como A es simétrica, sabemos que v_3 es ortogonal al plano generado por $B = \{v_1, v_2\}$.

Por lo tanto, hemos demostrado que la matriz A corresponde a la simetría con respecto a dicho plano y que $v_3 = (1, 1, 2)$ es ortogonal a dicho plano. Por lo tanto, la ecuación del plano de simetría es $x + y + 2z = 0$

4. Cálculo de Simetrías

Consideremos ahora el problema de calcular la simetría S_π con respecto al plano π de ecuación $x = 2y$.

En primer lugar podemos deducir que una base $H = \{v_1, v_2\}$ para dicho plano está dada por $v_1 = (2, 1, 0)$, $v_1 = (0, 0, 1)$; sabemos que dicho plano debe ser el espacio característico asociado a $\lambda_1 = 1$.

En segundo lugar, la ecuación $x = 2y$ corresponde a un plano con vector normal $v_3 = (1, -2, 0)$. Por lo tanto, dicho vector forma una base para el espacio característico asociado a $\lambda_1 = -1$.

En resumen, $P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ es la matriz de cambio de la base $B = \{v_1, v_2, v_3\}$, a la base natural de $\mathbb{R}^3$; además se tiene que

$$
\begin{aligned}
[S_\pi]_B &= P^{-1}[S_\pi]_{NAT}\,P && (2)\\
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} &= P^{-1}[S_\pi]_{NAT}\,P && (3)
\end{aligned}
$$

De la ecuación (3) se tiene

$$
[S_\pi]_{NAT} = P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} P^{-1} \tag{4}
$$

de donde resulta

$$
[S_\pi]_{NAT} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5}
$$

Por inspección de la matriz (5) se obtiene, finalmente,

$$
S_\pi(x, y, z) = (\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y,\ \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y,\ z) \tag{6}
$$

5. Conclusiones

En esta nota hemos presentado una aplicación elemental de la teoría de operadores diagonalizables.

Existen libros que exponen la teoría en forma clara y amena. Uno de tales libros es “Introduction to Linear Algebra”, de Gilbert Strang. El profesor Strang ha escrito otras obras relacionadas con el tema y, actualmente, podemos disfrutar de sus clases en “YouTube”.