La integral de Riemann como límite de sucesiones de sumas de Riemann

Prof. Arsenio Cornejo Jordán

octubre 10, 2015

En el laboratorio de Scilab (septiembre 30, 2015) mostramos como escoger una sucesión de sumas de Riemann. de modo que la suma n-ésima esté dada por la expresión

$$S_n(f,[a,b]) = \sum_{i=1}^{n} f(x_0 + i\Delta_x)\Delta_x \tag{1}$$

Se entiende que la partición del intervalo [a, b] es uniforme con norma dada por $\Delta_x = \dfrac{b-a}{n}$.

Así, en el caso particular de la integral $\int_0^2 (2x^2 + x)\,dx$, la suma n-ésima de Riemann toma la forma

$$S_n(f,[0,2]) = \sum_{i=1}^{n} f(i\Delta_x)\Delta_x, \quad \Delta_x = \frac{3}{n}, \quad f(x) = 2x^2 + x \tag{2}$$

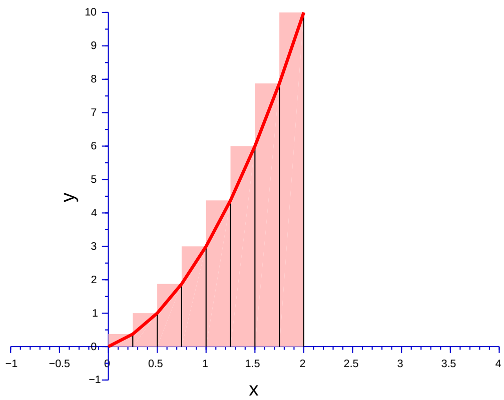

Figura 1: Ilustración de una suma de Riemann para $f(x) = 2x^2 + x$, $n = 8$

Calculemos la suma de Riemann (2):

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{2i}{n}\right)\frac{2}{n} &= \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[2\left(\frac{2i}{n}\right)^2 + \frac{2i}{n}\right] \\
&= \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{8i^2}{n^2} + \frac{2i}{n}\right] \\
&= \frac{2}{n}\left[\frac{8}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} i\right] \\
&= \frac{2}{n}\left[\frac{8}{n^2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{2}{n}\frac{n(n+1)}{2}\right]
\end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{2i}{n}\right)\frac{2}{n} = \frac{8}{3n^3}\left[n(n+1)(2n+1)\right] + \frac{2}{n^2}\left[n(n+1)\right]$$

Tomando el límite obtenemos

$$\int_0^2 (2x^2 + x)\, dx = \frac{22}{3} \tag{3}$$

Ejercicios

En cada problema se desea calcular la integral como límite de cierta suma de Riemann. Se incluyen pasos que pueden guiar al lector durante dichos cálculos.

1.

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2\, dx &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2 \\ &= \lim_{n\ \infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\int_1^3 x^2\, dx &= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{2i}{n}\right)^2 \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{3n^2} + \frac{8}{n} + \frac{26}{3}\right) \\ &= \frac{26}{3}\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\int_0^2 (2x+1)^2\, dx &= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{4i}{n}\right)^2 \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{2(31n^2 + 36n + 8}{3n^2} \\ &= \frac{62}{3}\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}\int_1^3 (3x+1)\, dx &= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[3\left(1+\frac{2i}{n}\right)+1\right] \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}\left[4n + \left(\frac{6}{n}\right)\frac{n(n+1)}{2}\right] \\ &= 14\end{aligned}$$