Cálculo de integrales indefinidas por sustituciones algebraicas

Prof. Arsenio Cornejo Jordán

julio 5, 2014

Algunas integrales pueden calcularse si las relacionamos con las integrales básicas.

La siguiente lista presenta algunas de las integrales básicas:

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \text{ siempre que } a \neq -1 \tag{1}$$

$$\int e^x dx = e^x + C \tag{2}$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(x) + C, \quad x > 0 \tag{3}$$

$$\int sen(x)\, dx = -\, cos(x) + C \tag{4}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = arctan(x) + C \tag{5}$$

Los métodos de sustitución, para el cálculo de integrales, tienen el propósito de reducir el cálculo de integrales al cálculo de integrales básicas o, en general, al cálculo de integrales ya calculadas.

En algunos casos, la integral a calcular es algebraicamente similar a una integral básica. Por ejemplo

$$\int (x+1)^3\, dx \tag{6}$$

es, esencialmente, una integral de tipo (1). Esto puede verificarse, considerando la sustitución $u = (x+1)$; tal sustitución nos lleva al diferencial $du = dx$; al realizar la sustitución, se tiene

$$\int (x+1)^3\, dx = \int u^3\, du \tag{7}$$

En general, no es evidente que una integral pueda relacionarse con alguna integral básica, ni es evidente qué integrales básicas (si existen) estén relacionadas con la integral que deseamos resolver.

En general puede ocurrir, entre otras posibilidades, que:

- Al realizar la sustitución resulta una integral que puede expresarse como suma de integrales; tales integrales pueden ser integrales básicas o, integrales que deben transformarse previamente empleando alguna sustitución.
- Sea posible que la integral pueda expresarse como suma de integrales; en este caso, cada integral debe calcularse por separado.

En este tutorial presentamos ejemplos resueltos en los que mostraremos cómo se aplican las sustituciones algebraicas para calcular integrales.

1. Integrales relacionadas con el tipo (1)

Ejemplo 1. $\displaystyle\int x\sqrt{x^2+1}\,dx$

Tomamos $u = x^2+1$*; el diferencial de* u *es* $du = 2xdx$*; resulta*

$$u = 2x+1; x\,dx = \frac{1}{2}du \tag{8}$$

Al realizar la sustitución y aplicar la fórmula básica (1) se tiene:

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{x^2+1}\,dx &= \int u^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)du\\ &= \frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}du\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right)\\ &= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)u^{\frac{3}{2}}+C\\ &= \frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}}+C\\ &= \frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}+C\end{aligned}$$

En los siguientes ejemplos, la sustitución transforma la integral en una suma de integrales.

Ejemplo 2. $\displaystyle\int x\sqrt{2x+1}\,dx$

Tomemos $u = 2x+1$*; el diferencial de* u *es* $du = 2dx$*; tenemos entonces que:*

$$u = 2x+1; \quad dx = \frac{1}{2}du; \quad x = \frac{1}{2}(u-1) \tag{9}$$

Al realizar la sustitución se tiene:

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{2x+1}\,dx &= \int \frac{1}{2}(u-1)u^{\frac{1}{2}}du \\ &= \frac{1}{2}\int \left(u^{\frac{3}{2}} - u^{\frac{1}{2}}\right) du \\ &= \frac{1}{2}\int u^{\frac{3}{2}}\,du - \frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}\,du\end{aligned}$$

Al aplicar la fórmula (1) en ambas integrales resulta, después de ciertas transformaciones algebraicas, que

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{2x+1}\,dx &= \frac{1}{5}u^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}} + C \\ &= \frac{1}{5}(2x+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}} + C\end{aligned}$$

Ejemplo 3. $\displaystyle\int \frac{3x+1}{\sqrt{x+2}}\,dx$

Tomemos $u = x+1$; tenemos

$$u = x+2, \quad du = dx, \quad x = u-1 \tag{10}$$

Al realizar la sustitución se tiene:

$$\begin{aligned}\int \frac{3x+1}{\sqrt{x+2}}\,dx &= \int \frac{3(u-2)+1}{u^{\frac{1}{2}}}\,dx \\ &= \int (3u-5)u^{-\frac{1}{2}}\,dx \\ &= \int \left(3u^{\frac{1}{2}} - 5u^{-\frac{1}{2}}\right) dx \\ &= \int 3u^{\frac{1}{2}}\,dx - \int 5u^{-\frac{1}{2}}\,dx \\ &= 3\int u^{\frac{1}{2}}\,dx - 5\int u^{-\frac{1}{2}}\,dx\end{aligned}$$

Al aplicar la fórmula (1) en ambas integrales resulta, después de ciertas transformaciones algebraicas, que

$$\begin{aligned}3\int u^{\frac{1}{2}}\,dx - 5\int u^{-\frac{1}{2}}\,dx &= 2u^{\frac{3}{2}}\,dx - 10\,u^{\frac{1}{2}} + C \\ &= 2(x+2)^{\frac{3}{2}}\,dx - 10\,(x+2)^{\frac{1}{2}} + C\end{aligned}$$

2. Integrales relacionadas con el tipo (2)

Ejemplo 4. $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}}\,dx$

Tomemos $u = \sqrt{x+1}$; el diferencial de u es $du = \left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{x+1}}dx$; tenemos entonces que:

$$u = \sqrt{x+1}; \quad 2du = \frac{1}{\sqrt{x+1}}dx \tag{11}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}}\,dx &= \int e^u\,2du\\ &= 2e^u + C\\ &= 2e^{\sqrt{x+1}} + C\end{aligned}$$

Ejemplo 5. $\int \frac{e^{tan(x)}}{cos^2(x)}\,dx$

Tomamos $u = tan(x)$; se tiene que

$$u = tan(x); \quad du = sec^2(x)dx = \frac{1}{cos^2(x)}dx \tag{12}$$

Al realizar la sustitución resulta

$$\begin{aligned}\int \frac{e^{tan(x)}}{cos^2(x)}\,dx &= \int e^u\,du\\ &= e^u + C\\ &= e^{tan(x)} + C\end{aligned}$$

3. Integrales relacionadas con el tipo (3)

Ejemplo 6. $\int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$

Tomamos $u = e^x$, o sea $x = ln(u)$; tenemos entonces que

$$x = ln(u); \quad dx = \frac{1}{u}du \tag{13}$$

Al realizar la sustitución resulta

$$\begin{aligned}\int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx &= \int \frac{u}{1+u}\left(\frac{1}{u}\right)du\\ &= \int \frac{1}{1+u}\,du\\ &= ln(1+u) + C\\ &= ln(1+e^x) + C\end{aligned}$$

4. Integrales relacionadas con el tipo (4)

Ejemplo 7. $\displaystyle\int xsen(3x^2+5)\,dx$

Tomamos $u = 3x^2+2$*; se tiene que* $du = 6xdx$*; tenemos, por lo tanto, que*

$$u = 3x+2; \quad du = 6xdx; \quad xdx = \frac{1}{6}du \tag{14}$$

Al realizar la sustitución resulta

$$\begin{aligned}\int xsen(3x^2+5)\,dx &= \int sen(u)\,\frac{1}{6}du \\ &= \frac{1}{6}\int sen(u)\,du \\ &= -\frac{1}{6}cos(u)+C \\ &= -\frac{1}{6}cos(3x^2+5)+C\end{aligned}$$

5. Integrales relacionadas con el tipo (5)

Ejemplo 8. $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^4}\,dx$

Tomamos $u = x^2$*,* $du = 2xdx$*; tenemos entonces que*

$$u = x^2; \quad xdx = \frac{1}{2}du \tag{15}$$

Al realizar la sustitución resulta

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{1+x^4}\,dx &= \int \frac{1}{1+u^2}\left(\frac{1}{2}\,du\right) \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+u^2}\,du \\ &= \frac{1}{2}arctan(u)+C \\ &= \frac{1}{2}arctan(x^2)+C\end{aligned}$$

Ejemplo 9. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx$

Al completar cuadrados se tiene

$$x^2+2x+2 = (x+1)^2+1 \tag{16}$$

Por lo que la integral toma la forma

$$\int \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx = \int \frac{1}{(x+1)^2+1}\,dx \tag{17}$$

Con la sustitución $u = x+1$, $du = dx$, *la integral toma la forma (5); se tiene*

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x+1)^2+1}\,dx &= \int \frac{1}{u^2+1}\,du \\ &= arctan(u) + C \\ &= arctan(x+1) + C \end{aligned}$$

Ejemplo 10. $\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$

Observemos que el integrando no es una ***fracción propia****. Podemos transformarlo a la forma mixta (polinomio más fracción propia) dividiendo el numerador entre el denominador; resulta*

$$\frac{x^2}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2} \tag{18}$$

Calculando la integral resulta:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx &= \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx \\ &= \int dx - \int \frac{1}{1+x^2}\,dx \\ &= x - arctan(x) + C \end{aligned}$$

Ejemplo 11. $\int \frac{cos(x)}{1+sen^2(x)}\,dx$

Tomando $u = sen(x)$, $du = cos(x)$, *se tiene*

$$\begin{aligned} \int \frac{cos(x)}{1+sen^2(x)}\,dx &= \int \frac{1}{u^2+1}\,du \\ &= arctan(u) + C \\ &= arctan(sen(x)) + C \end{aligned}$$

Ejemplo 12. $\int \frac{3+2x}{4x^2+1}\,dx$

Tomamos $u = 2x$, $du = 2xdx$; *tenemos entonces que*

$$u = 2x; \quad xdx = \frac{1}{2}du \tag{19}$$

La integral toma la forma

$$\int \frac{3+2x}{4x^2+1}\,dx = \int \frac{3+u}{u^2+1}\,\left(\frac{1}{2}du\right) \tag{20}$$

Calculamos la integral obtenida:

$$\begin{aligned}\int \frac{3+u}{u^2+1}\,\left(\frac{1}{2}du\right) &= \frac{1}{2}\left[\int \frac{3}{u^2+1}\,du + \int \frac{u}{u^2+1}\,du\right] \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{3}{u^2+1}\,du + \frac{1}{2}\int \frac{u}{u^2+1}\,du \\ &= \frac{1}{2}H(u) + \frac{1}{2}K(u) \qquad (21)\end{aligned}$$

en donde

$$H(u) = \int \frac{3}{u^2+1}\,du \tag{22}$$

y

$$K(u) = \int \frac{u}{u^2+1}\,du \tag{23}$$

El lector puede realizar los cálculos para obtener

$$H(u) = 3\,arctan(u) \tag{24}$$

y

$$K(u) = \frac{1}{2}\,ln(u^2+1) \tag{25}$$

Sustituyendo en la ecuación (21)*, se tiene*

$$\begin{aligned}\int \frac{3+u}{u^2+1}\,\left(\frac{1}{2}du\right) &= \frac{1}{2}\left[3\,arctan(u)\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\,ln(u^2+1)\right] + C \\ &= \frac{3}{2}\,arctan(2x) + \frac{1}{4}ln(4x^2+1) + C\end{aligned}$$