Soluciones de Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden

Arsenio Cornejo Jordán
Dept. de Matemática
Universidad Nacional de Panamá

septiembre 24, 2010

Temas

Descripción

Sean $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto y conexo de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ una función con dominio $\mathcal{U}$. La forma general de una ecuación diferencial de primer orden es

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t)) \tag{1}$$

Algunos ejemplos de ecuaciones de primer orden son:

$$\frac{dx}{dt} + 2x = t \qquad \text{(Ecuación Lineal)} \tag{2}$$

$$\frac{dx}{dt} = x^2 \qquad \text{(Ecuación no lineal, autónoma)} \tag{3}$$

Temas

¿Qué es una solución?

Diremos que $\phi : I \to \mathbb{R}$ es solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t)) \tag{4}$$

si:

1. El dominio I de ϕ es un intervalo abierto.
2. $\forall t \in I$, $(t, \phi(t)) \in \mathcal{U}$.
3. ϕ es derivable sobre I.
4. $\forall t \in (a, b)$, $\phi'(t) = f(t, \phi(t))$

Temas

Sea $(t_0, x_0) \in \mathcal{U}$. El **Problema de Cauchy** asociado a la ecuación diferencial (1) está dado por

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(t, x(t)) \\ \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{5}$$

Diremos que una función ϕ es solución del problema de Cauchy si dicha función es una solución de la ecuación diferencial asociada al problema y, en adición, $t_0 \in dom(\phi)$, y, $\phi(t_0) = x_0$.

Temas

Teorema (Cauchy)

Sea $\mathcal{U} = \{(t, x) | a < t < b, c < x < d\}$, $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$. *Si* f, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *son continuas sobre* $\mathcal{U}$, *entonces existe una solución* ϕ, *y sólo una, en algún intervalo* $I \subseteq (a, b)$, *tal que* $t_0 \in I$.

Temas

$$(t^2-9)\frac{dx}{dt}+2x=\ln|20-4t|, \quad x(4)=-3 \tag{6}$$

La ecuación dada tiene la forma

$$\frac{dx}{dt}+\frac{2x}{t^2-9}=\frac{\ln|20-4t|}{t^2-9} \tag{7}$$

es decir,

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x) \tag{8}$$

en donde

$$f(x,t)=-\frac{2x}{t^2-9}+\frac{\ln|20-4t|}{t^2-9} \tag{9}$$

1. $f, \dfrac{\partial f}{\partial x}$, son continuas sobre $(\mathbb{R}-\{-3,3,5\})\times\mathbb{R}$.
2. Intervalos de validez:

$$(-\infty,-3), \quad (-3,3), \quad (3,5), \quad (5,\infty)$$

Intervalo de validez para de la solución $x(4)=-3$: $(3,5)$.

Temas

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x^2 \\ \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{10}$$

Observemos en primer lugar que, si $x_0 = 0$, la función nula, x(t) = 0, $t \in \mathbb{R}$, es solución del problema.
Supongamos entonces que $x_0 \neq 0$; se tiene;

$$\frac{dx}{dt} = x^2 \tag{11}$$

$$x^{-2}dx = dt \tag{12}$$

$$\int_{x_0}^{x} x^{-2}\,dx = \int_0^t \,dt \tag{13}$$

$$-\frac{1}{x} + \frac{1}{x_0} = t \tag{14}$$

la solución de la ecuación es

$$x = \frac{1}{\frac{1}{x_0} - t} \tag{15}$$

Los intervalos de validez son $(-\infty, \frac{1}{x_0})$, $(\frac{1}{x_0}, \infty)$. Pero observe que la solución del problema depende del signo de x_0; si $x_0 > 0$, el intervalo es $(-\infty, \frac{1}{x_0})$; pero si $x_0 < 0$, el intervalo de validez es el otro.

Temas

Al resolver problemas de Cauchy, se debe tener en cuenta el tipo de ecuación diferencial. En estas notas, hemos observado que, en el caso de las ecuaciones lineales, es suficiente considerar la región en la que las funciones f, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ son continuas. En cambio, la determinación del intervalo de validez para ecuaciones no lineales exige conocer qué forma tienen las soluciones de la ecuación diferencial asociada al problema de Cauchy.

Muchas gracias