

Programación Lógica

Arsenio Cornejo Jordán
Dept. de Matemática
Universidad Nacional de Panamá

mayo 18, 2012

Temas

1 ¿Qué es la Programación Lógica

2 Lógica e Informática

3 Lógicas de Primer Orden

4 Sintaxis y Semántica

5 Semántica

6 Interpretaciones

7 Consecuencia Lógica

8 El Método de Resolución

Programación Lógica

El término **programación lógica** se refiere a lenguajes de programación que se han diseñado tomando en cuenta una lógica dada; es decir:

- El lenguaje de programación representa un lenguaje lógico.
- El control de la computación, es decir, la ejecución del programa correspondiente, se basa en algún mecanismo deductivo asociado a la lógica representada por el lenguaje.

Prolog

El lenguaje Prolog es el primer lenguaje de programación en el que se emplea cierta lógica para representar el conocimiento, y cierto mecanismo deductivo como modelo de computación.

El lenguaje surgió en 1972 de las mentes creativas de Alan Colmerauer y Philippe Russell; su nombre es la contracción de la frase “Programación Lógica”.

La lógica en Prolog es un fragmento de la lógica de primer orden.

El mecanismo deductivo es el **Método de Resolución**; dicho mecanismo está estrechamente relacionado con los conceptos presentados por el matemático francés Jacques Herbrand, en 1930, en su tesis de doctorado “**Recherches sur la Théorie de la Démonstration**”.

Temas

1 ¿Qué es la Programación Lógica

2 Lógica e Informática

3 Lógicas de Primer Orden

4 Sintaxis y Semántica

5 Semántica

6 Interpretaciones

7 Consecuencia Lógica

8 El Método de Resolución

En los últimos 50 años, el desarrollo de la Informática ha estimulado una gran diversidad de lógicas.

Areas

- Inteligencia Artificial
- Verificación de sistemas reactivos
- Corrección de programas escritos en diversos lenguajes de programación.

Lógicas

- Lógicas de primer orden.
- Lógicas Modales.
- Lógicas Epistémicas.
- Lógicas de Ecuaciones.
- Lógicas basadas en el Cálculo Lambda.

Temas

1 ¿Qué es la Programación Lógica

2 Lógica e Informática

3 Lógicas de Primer Orden

4 Sintaxis y Semántica

5 Semántica

6 Interpretaciones

7 Consecuencia Lógica

8 El Método de Resolución

El formalismo y conceptos nacidos en el seno de la lógica clásica han incidido, de una manera u otra, en las las lógicas que han sido creadas.

Una de las características comunes a las lógicas, es la especificación formal de las estructura de las fórmulas mediante la aplicación de ciertas reglas sintácticas.

En el caso de las lógicas de primer orden, debemos especificar, en primer lugar, el **alfabeto**, es decir, el conjunto de símbolos que nos permitirán expresar formalmente los enunciados de la teoría de la que debe tratar la lógica.

Alfabeto

Un lenguaje de primer orden consiste de un **alfabeto** cuyos elementos son:

- Símbolos de constante
- Símbolos de función
- Símbolos de predicado
- Símbolos de variables.
- Símbolos de conectivas lógicas.
- Símbolos de cuantificadores (Universal, \forall , y existencial \exists)

Cualquier sucesión de símbolos del alfabeto es una *expresión* del lenguaje.

Términos y Fórmulas

En segundo lugar, a partir de los símbolos del alfabeto, se tienen:

- Los **términos**, que son aquellas expresiones que se interpretan como elementos de un conjunto
- Las **fórmulas** que expresan propiedades y/o relaciones entre dichos elementos.

Temas

1 ¿Qué es la Programación Lógica

2 Lógica e Informática

3 Lógicas de Primer Orden

4 Sintaxis y Semántica

5 Semántica

6 Interpretaciones

7 Consecuencia Lógica

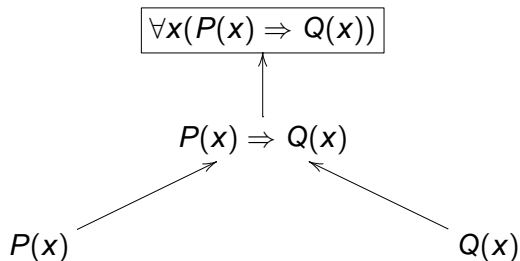
8 El Método de Resolución

La descripción anterior supone que podemos distinguir cuáles serán las expresiones eventualmente significativas, es decir, cuáles serán las fórmulas.

Sin embargo, un requisito importante de toda lógica es la distinción entre la sintaxis del lenguaje y la manera como lo interpretemos:

Sintaxis del lenguaje Descripción formal de la estructura lingüística de las fórmulas.

Semántica del lenguaje Descripción formal por la que se asigna significado a las fórmulas.

Estructura Sintáctica de $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x))$ 

El diagrama muestra cómo se aplican ciertas reglas sintácticas para “construir” la fórmula.

Temas

1 ¿Qué es la Programación Lógica

2 Lógica e Informática

3 Lógicas de Primer Orden

4 Sintaxis y Semántica

5 Semántica

6 Interpretaciones

7 Consecuencia Lógica

8 El Método de Resolución

Interpretaciones y Modelos

La semántica de un lenguaje y, en particular, el significado de sus fórmulas, está dada por una **interpretación** del lenguaje.

Llamamos interpretación de un lenguaje lógico a una estructura formal dada por:

- 1 Un conjunto no vacío; éste es el dominio de la interpretación
- 2 Una asignación de elementos del dominio a las constantes del lenguaje
- 3 Una asignación de funciones y relaciones sobre el dominio a los símbolos de funciones y predicados que del lenguaje.

Un lenguaje de primer orden

Consideremos, por ejemplo, un lenguaje que consta de:

- Símbolos de constantes a, b, c
- Símbolos de predicado $\mathcal{R}/2, \mathcal{P}/2$

Temas

1 ¿Qué es la Programación Lógica

2 Lógica e Informática

3 Lógicas de Primer Orden

4 Sintaxis y Semántica

5 Semántica

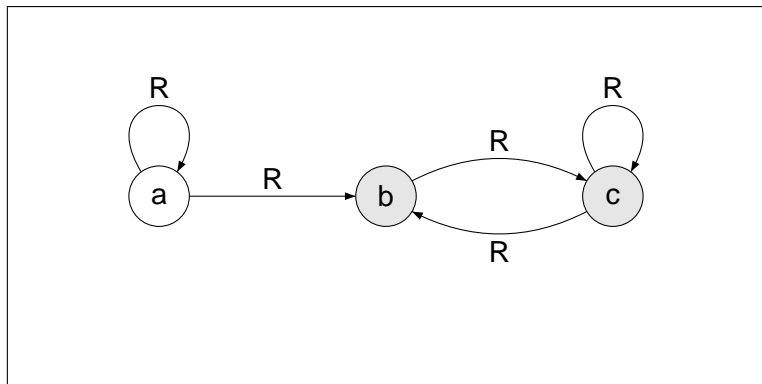
6 Interpretaciones

7 Consecuencia Lógica

8 El Método de Resolución

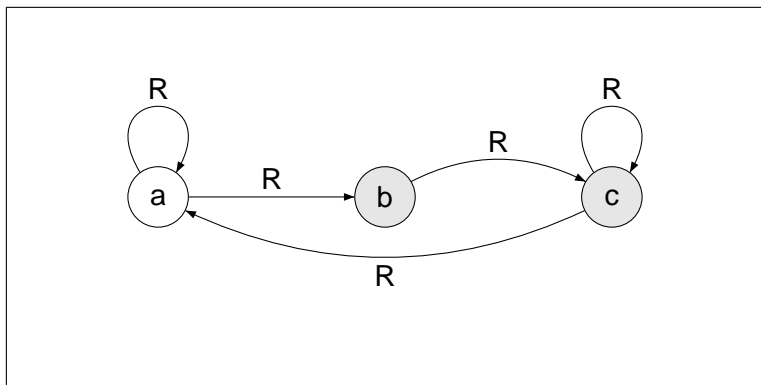
Primera Interpretación

El siguiente grafo muestra una interpretación del lenguaje; las constantes del lenguaje son los nodos del grafo:



Fórmulas: $\exists x R(x, a), \forall y (\forall x (P(x) \wedge R(x, y)) \Rightarrow P(y))$

Segunda Interpretación



Fórmulas: $\exists x R(x, a), \quad \forall y (\forall x (P(x) \wedge R(x, y)) \Rightarrow P(y))$

Temas

1 ¿Qué es la Programación Lógica

2 Lógica e Informática

3 Lógicas de Primer Orden

4 Sintaxis y Semántica

5 Semántica

6 Interpretaciones

7 Consecuencia Lógica

8 El Método de Resolución

La noción de modelo nos permite formalizar la noción de consecuencia lógica:

Sean Σ un conjunto de fórmulas. Diremos que una fórmula B es consecuencia lógica del conjunto Σ , si todo modelo de Σ es modelo de B

La expresión

$$\Sigma \models B$$

se lee " B es consecuencia lógica de Σ ".

Podemos afirmar, por ejemplo, que

$$\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)), P(a), R(a) \models \exists xQ(x)$$

Temas

1 ¿Qué es la Programación Lógica

2 Lógica e Informática

3 Lógicas de Primer Orden

4 Sintaxis y Semántica

5 Semántica

6 Interpretaciones

7 Consecuencia Lógica

8 El Método de Resolución

Podemos aplicar el Método de Resolución para decidir si $\Sigma \models B$. Para aplicarlo debemos tomar en cuenta el siguiente teorema:

Sea Σ un conjunto de fórmulas. Entonces B es consecuencia lógica de Σ , si y sólo si el conjunto $\Sigma \cup \{\sim B\}$ es insatisfacible.

Por ejemplo, para demostrar que

$$\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)), P(a) \models \exists xQ(x)$$

es suficiente demostrar que el conjunto

$$\mathcal{S} = \{ \forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)), P(a), \sim \exists xQ(x) \}$$

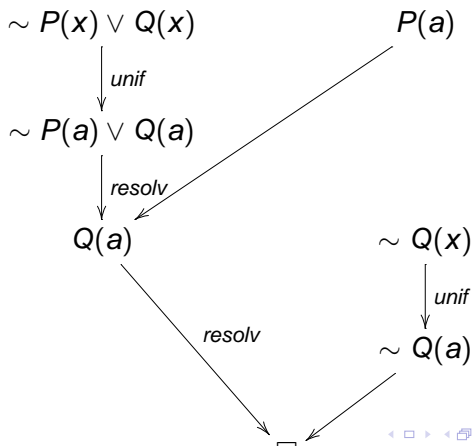
es insatisfacible.






Como $\sim \exists xQ(x) \Leftrightarrow \forall x \sim Q(x)$, podemos describir a \mathcal{S} en la forma

$$\mathcal{S} = \{ \forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)), P(a), \forall x \sim Q(x) \}$$

El Método de Resolución

En el siguiente diagrama se muestra cómo se aplica la **Regla del Resolvente**, y **unificación de términos**, para mostrar que el conjunto S es insatisfacible:



-  M. Ben-Ari.
Mathematical logic for computer science.
Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, USA, 1993.
-  Herbert B. Enderton.
A Mathematical Introduction to Logic.
Harcourt Academic Press, 2nd edition, 2001.
-  Robert A. Kowalski.
The early years of logic programming.
Commun. ACM, 31(1):38–43, January 1988.
-  John W. Lloyd.
Foundations of Logic Programming, 2nd Edition.
Springer, 1987.
-  Elliott Mendelson.
Introduction to Mathematical Logic.
Chapman & Hall/CRC, 5th edition, 2009.



John-Jules Ch Meyer and Wiebe Van Der Hoek.
Epistemic Logic for AI and Computer Science.
Cambridge University Press, New York, NY, USA, 1995.



Daniel Quesada.
Enciclopedia iberoamericana de filosofía (vol. 8).
chapter Lógica Clásica de Primer Orden, pages 71–104. Editorial
Trotta, S.A., Madrid, España, 1995.



J. A. Robinson.
A machine-oriented logic based on the resolution principle.
J. ACM, 12(1):23–41, January 1965.