

Sesión 2: El Lenguaje proposicional - Sintaxis

Profesor: Arsenio Cornejo

Escrito por: Arsenio Cornejo

2.1. Lenguajes Lógicos

En los lenguajes lógicos se intenta formalizar algunas de las características lingüísticas que permitan analizar los conceptos de un área científica dada.

En particular, en el lenguaje de la lógica proposicional se consideran aquellos enunciados que puedan expresarse empleando las conectivas básicas, “o”, “y”, “no”, “si . . . entonces”, y la conectiva “... es equivalente a ...”.

2.2. Conectivas y Fórmulas

El alfabeto del lenguaje proposicional consiste de:

- Un conjunto de símbolos $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ a los que llamaremos *fórmulas atómicas*
- Un conjunto de símbolos $\sim, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ a los que llamaremos *conectivas lógicas*
- Los símbolos de paréntesis ‘(, ’’.

Cualquier sucesión de símbolos del alfabeto es una *expresión* del lenguaje proposicional. A continuación se describe el conjunto de las expresiones bien formadas (las que llamaremos *fórmulas*) del lenguaje proposicional.

Definición 2.1 (Fórmulas) *El conjunto de las fórmulas del lenguaje proposicional es el menor conjunto de expresiones del lenguaje que satisfacen las siguientes condiciones:*

1. *Todas las fórmulas atómicas son fórmulas.*
2. *Si A es una fórmula, entonces $(\sim A)$ es una fórmula.*
3. *Si A, B son fórmulas, entonces $(A \wedge B)$ es una fórmula.*
4. *Si A, B son fórmulas, entonces $(A \vee B)$ es una fórmula.*
5. *Si A, B son fórmulas, entonces $(A \Rightarrow B)$ es una fórmula.*
6. *Si A, B son fórmulas, entonces $(A \Leftrightarrow B)$ es una fórmula.*

Desde el punto de vista de la sintaxis, la estructura sintáctica de cualquier fórmula, debe ser la dada por la aplicación de las reglas. por ejemplo,

$$((\sim p) \Rightarrow (q \vee r))$$

tiene la forma

$$(A \Rightarrow B);$$

para destacar ésto se dice que \Rightarrow es la *conectiva principal* de la fórmula $((\sim p) \Rightarrow (q \vee r))$.

por otro lado, podemos aplicar la definición de fórmula, (Definición 2.1), para determinar si una expresión del lenguaje es una fórmula ; esto lo mostramos en el próximo ejemplo.

Ejemplo: Suponga que p, q, r son fórmulas atómicas. Demuestre que que $((\sim p) \Rightarrow (q \vee r))$ es una fórmula.

Demostración:(Aplicando la Definición 2.1)

- | | |
|--|-----------------|
| 1. p es una fórmula. | regla 1 |
| 2. $(\sim p)$ es una fórmula. | [1], regla 2 |
| 3. q es una fórmula. | regla 1 |
| 4. r es una fórmula. | regla 1 |
| 5. $(q \vee r)$ es una fórmula | [3, 4], regla 4 |
| 6. $((p) \Rightarrow (q \vee r))$ es una fórmula | [2, 5], regla 5 |

2.3. Precedencia de conectivas lógicas

Con el fin de simplificar la notación proposicional adoptaremos las siguientes convenciones:

- Omitiremos el par externo de paréntesis.
- Aplicaremos el siguiente orden de precedencia de las conectivas lógicas (de mayor a menor): $\sim, \wedge, \vee, \Rightarrow, \text{y}, \Leftrightarrow$.

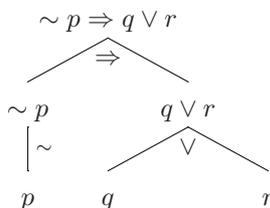
La siguiente tabla muestra cómo se pueden aplicar las convenciones propuestas.

Fórmula	Expresión simplificada
$((\sim p) \Rightarrow (q \vee r))$	$\sim p \Rightarrow q \vee r$
$((p \wedge q) \Rightarrow (q \vee r))$	$p \wedge q \Rightarrow q \vee r$
$((p \Rightarrow q) \Leftrightarrow ((\sim q) \Rightarrow (\sim p)))$	$p \Rightarrow q \Leftrightarrow \sim q \Rightarrow \sim p$
$((p \Rightarrow q) \Leftrightarrow ((\sim p) \vee q))$	$p \Rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q$
$(p \Rightarrow (q \Leftrightarrow S))$	$p \Rightarrow (q \Leftrightarrow S)$

Observación 2.2 Emplearemos el término **fórmula** para referirnos a la expresión simplificada correspondiente; en el caso de que lo creamos necesario, emplearemos la frase más explícita **fórmula simplificada**.

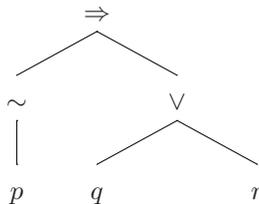
2.4. Diagrama estructural

El *diagrama estructural* de una fórmula es la expresión gráfica de la estructura lógica de la fórmula. por ejemplo, a la fórmula $\sim p \Rightarrow q \vee r$ le corresponde el *diagrama estructural*:

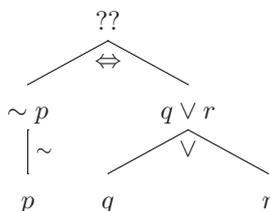


Dicho diagrama es un árbol en el que cada nodo ocurre una *subfórmula* de la dada; observe que las subfórmulas de $\sim p \Rightarrow q \vee r$ son: $\sim p \Rightarrow q \vee r$, $\sim p$, $q \vee r$, p , q y r .

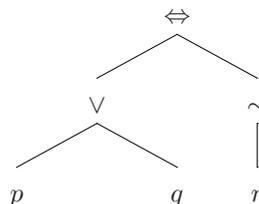
Al simplificar el diagrama estructural de la fórmula obtenemos su *árbol sintáctico*:



Problema 2.3 Escriba la fórmula que corresponde al siguiente diagrama:



Problema 2.4 Escriba la fórmula que corresponde al siguiente árbol sintáctico:



Problema 2.5 Escriba la fórmula que corresponde al siguiente árbol sintáctico:

