Lógica Formal **2008**

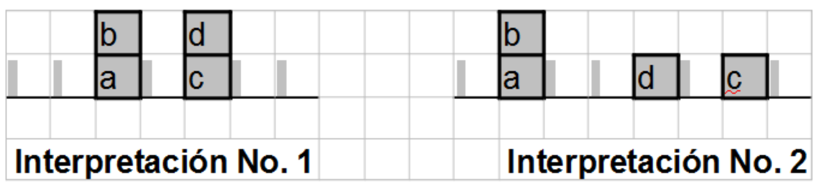
Sesión 3: Lógica proposicional - Semántica

Profesor: Arsenio Cornejo *Escrito por: Arsenio Cornejo*

La semántica de un lenguaje proposicional describe cómo calcular el valor de verdad de cualquier fórmula y, a su vez, dicho valor depende de la estructura sintáctica de la fórmula.

3.1. Bloquelandia

Consideremos un lenguaje proposicional que permita describir la posición de cuatro bloques **a, b, c** y **d** sobre una mesa.



Las **fórmulas atómicas** se refieren a la posición relativa de los bloques; por ejemplo, **sobre(b, a)** se refiere a que el bloque **b** está colocado directamente sobre el bloque **a** mientras que **enmesa(b)** se refiere a que el bloque **b** está sobre la mesa. Puede ocurrir que sobre el bloque **a** no se encuentre ningún otro bloque: la fórmula **libre(a)** se refiere a que no hay bloques sobre el bloque **a**.

El valor de verdad de las fórmulas atómicas está dado por la interpretación particular que consideremos.

Así en la interpretación No. 1 (ver figura) las fórmulas **sobre(b, a)**, **enmesa(a)** son verdaderas pero la proposición **enmesa(b)** es falsa.

Observe que el valor de verdad de una fórmula puede ser **T** (verdad) con respecto a una interpretación, pero puede ser **F** (falsa) con respecto a otras; por ejemplo, la proposición atómica **enmesa(d)** es verdadera según la interpretación No. 2 pero no según la No.1; en estos casos se acostumbra decir que la interpretación No. 2 satisface a **enmesa(d)** o también, que dicha interpretación es **modelo** de **enmesa(d)**.

La noción de modelo puede extenderse a un conjunto de fórmulas. Así, la interpretación No. 1 es modelo del conjunto

$$\Sigma = \{\mathbf{sobre}(\mathbf{b},\mathbf{a}), \mathbf{enmesa}(\mathbf{a}), \mathbf{libre}(\mathbf{b})\}$$

pero no es modelo del conjunto

$$\Delta = \{\mathbf{sobre}(\mathbf{b},\mathbf{a}), \mathbf{enmesa}(\mathbf{c}), \mathbf{enmesa}(\mathbf{d})\}$$

ya que la interpretación No. 1 **no satisface** a la proposición **enmesa(d)**.

Podemos afirmar que en Bloquelandia resultan 20 fórmulas atómicas.

Convenimos en que toda interpretación particular asigna, a cada proposición atómica, un sólo valor de verdad, ya sea **T** (true) o **F** (false); en nuestro caso, la interpretación está dada implícitamente, por un diagrama; en Bloquelandia, por ejemplo, la interpretación No. 1 le asigna el valor **T** a las fórmulas en el conjunto

$$\{\mathbf{sobre}(\mathbf{b}, \mathbf{a}), \mathbf{sobre}(\mathbf{d}, \mathbf{c}), \mathbf{enmesa}(\mathbf{a}), \mathbf{enmesa}(\mathbf{c}), \mathbf{libre}(\mathbf{b}), \mathbf{libre}(\mathbf{d})\}$$

y el valor **F** a las 14 fórmulas atómicas restantes.

3.2. Semántica del lenguaje proposicional

En la sección anterior consideramos un lenguaje con 20 fórmulas atómicas y consideramos dos interpretaciones particulares.

La cuestión es cómo determinar el valor de verdad de fórmulas como

$$\mathbf{enmesa}(\mathbf{c}) \wedge \mathbf{sobre}(\mathbf{d}, \mathbf{c}) \tag{3.1}$$

Es decir, ¿cómo podemos "extender" una interpretación al conjunto de todas las fórmulas del lenguaje? En primer lugar, formalicemos el concepto de interpretación de fórmulas atómicas.

Definición 3.1 *Dado un lenguaje proposicional $\mathcal{L}$, con fórmulas atómicas Atom, denominamos* ***interpretación*** *de $\mathcal{L}$ a cualquier función $\mathcal{V} : Atom \to \{T, F\}$.*

Para extender una interpretación al conjunto de todas las fórmulas podemos aplicar el siguiente procedimiento recursivo:

Toda interpretación $\mathcal{V} : Atom \to \{T, F\}$ puede extenderse de manera única, a una función $\mathcal{V}^*$ que asigna un valor de verdad a toda proposición del lenguaje; las condiciones que $\mathcal{V}^*$ satisface son las siguientes (compare con la definición de proposición):

1. Si P es una proposición atómica entonces $\mathcal{V}^*(P) = \mathcal{V}(P)$.
2. Para toda proposición A, $\mathcal{V}^*(\sim A) = T$ si y sólo si $\mathcal{V}^*(A) = F$.
3. Para fórmulas cualesquiera A, B: $\mathcal{V}^*(A \wedge B) = T$ si y sólo si $\mathcal{V}^*(A) = T$, y, $\mathcal{V}^*(B) = T$.
4. Para fórmulas cualesquiera A, B: $\mathcal{V}^*(A \vee B) = T$ si y sólo si $\mathcal{V}^*(A) = T$, ó, $\mathcal{V}^*(B) = T$.
5. Para fórmulas cualesquiera A, B: $\mathcal{V} * (A \Rightarrow B) = T$ si y sólo si $\mathcal{V}^*(A) = F$, ó, $\mathcal{V}^*(B) = T$.
6. Para fórmulas cualesquiera A, B: $\mathcal{V}^*(A \Leftrightarrow B) = T$ si y sólo si $\mathcal{V}^*(A) = \mathcal{V}^*(B)$.

Convención: Emplearemos el mismo símbolo $\mathcal{V}$ para denotar dicha extensión.

3.3. Tablas de verdad

Las **tablas de verdad** constituyen una forma práctica para aplicar el procedimiento descrito en la sección (3.2); en esta sección mostramos cómo asociar una tabla de verdad a cada condición, y cómo aplicarlas al cálculo de valores de verdad.

3.3.1. Tablas de verdad básicas

En primer lugar, describimos una tabla de verdad, para cada conectiva lógica, aplicando la condición respectiva del procedimiento mencionado en la (3.2).

La tabla de verdad correspondiente a la condición 2, que se refiere a fórmulas de la forma $\sim A$, puede expresarse así:

A	$\sim A$
T	F
F	T

En adición, la tabla de verdad correspondiente a la condición 3 (el valor de verdad de $A \wedge B$), puede expresarse así:

A	B	$A \wedge B$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

Las tablas para las condiciones 4-6 aparecen a continuación:

Tabla para '$\vee$'

A	B	$A \vee B$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Tabla para '$\Rightarrow$'

A	B	$A \Rightarrow B$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

Tabla para '$\Leftrightarrow$'

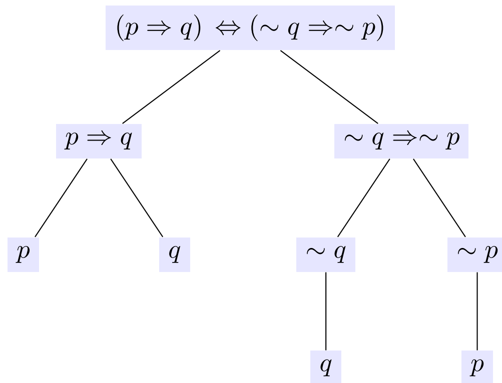
A	B	$A \Leftrightarrow B$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

3.3.2. Cálculo de tablas de verdad

En esta sección mostramos cómo calcular la tabla de verdad de la fórmula $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$.

El cálculo sistemático de dicha tabla de verdad exige que consideremos el diagrama estructural de la fórmula; la idea es que a cada nodo del diagrama estructural le corresponde una columna en dicha tabla.

Sabemos que el diagrama estructural de $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$ es



Por lo tanto, la tabla correspondiente debe tener la forma

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$	$p \Rightarrow q \Leftrightarrow \sim q \Rightarrow \sim p$
T	T					
T	F					
F	T					
F	F					

En base a las dos primeras columnas, y tomando en cuenta las tablas de verdad básicas, podemos calcular el resto de la tabla para obtener:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$	$p \Rightarrow q \Leftrightarrow \sim q \Rightarrow \sim p$
T	T	F	F	T	T	T
T	F	F	T	F	F	T
F	T	T	F	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T

Observe que la fórmula, $p \Rightarrow q \Leftrightarrow \sim q \Rightarrow \sim p$, asume el valor T en todos los casos, es decir, para cualquier interpretación del lenguaje; por esta razón, diremos que es una **tautología**.

3.4. Tautologías

Se llaman **tautologías** a las fórmulas que son verdaderas para cualquier interpretación del lenguaje. Algunas tautologías son:

1. $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$
2. $A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C$
3. $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$
4. $A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$
5. $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

6. $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge (A \wedge C)$
7. $\sim (A \vee B) \Leftrightarrow \sim A \wedge \ \sim B$
8. $\sim (A \wedge B) \Leftrightarrow \sim A \vee \ \sim B$
9. $A \Rightarrow B \Leftrightarrow \sim A \ \vee \ B$
10. $\sim (A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A \wedge \ \sim B$
11. $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow \ (A \ \Rightarrow B) \wedge (B \ \Rightarrow A)$
12. $A \Leftrightarrow A$
13. $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow A)$;
14. $(A \Leftrightarrow B) \wedge (B \Leftrightarrow C) \Rightarrow (A \Leftrightarrow C)$

3.5. Contradicciones y Conjuntos Consistentes

Denominamos **contradicciones** a las fórmulas falsas en cualquier interpretación.

Puede ocurrir que una fórmula no sea una contradicción pero tampoco sea una tautología; ésto ocurre, por ejemplo, con la fórmula $p \Rightarrow \sim q$, cuya tabla es:

p	q	$p \Rightarrow \sim q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	T

Lo que podemos afirmar es que existen fórmulas que son **fórmulas satisfacibles**, es decir, que no son contradicciones; observe que una fórmula satisfacible puede ser una tautología.

Por otro lado, diremos que un conjunto de fórmulas es **consistente** si existe alguna interpretación que satisface a todas sus fórmulas.

Un conjunto de fórmulas es **inconsistente** si no es consistente, es decir, si no existe interpretación alguna que satisfaga a todas sus fórmulas; más adelante veremos que la relación de consecuencia lógica puede expresarse en términos de conjuntos inconsistentes.