Lógica Formal **2018**

Sesión 4: Consecuencia Lógica

Profesor: Arsenio Cornejo *Escrito por: Arsenio Cornejo*

Una característica importante de nuestra era, es la rapidez con la que crece el conocimiento, por lo cual surge la necesidad de "procesar" dicha información.

Dicho "procesamiento" tiene el objetivo de:

- Determinar si la información dada es consistente.
- Aplicar un razonamiento "válido" para deducir información a partir de

Pero, ¿cómo podemos decidir si un razonamiento formal es válido?

Convenimos en que la validez de un razonamiento, depende de su "forma lógica"; ésto requiere:

- Esquematizar el razonamiento de modo que el conjunto de premisas Σ, y la conclusión C, sean fórmulas de un lenguaje lógico $\mathcal{L}$.
- Determinar si la relación formal entre Σ y C corresponde a la de un razonamiento válido.

Denominamos **consecuencia lógica** a dicha relación formal.

4.1. Interpretaciones y Modelos

Para decidir si una conclusión C es **consecuencia lógica** de un conjunto de premisas Σ, debemos considerar el concepto de **modelo de un conjunto de fórmulas**.

Definición 4.1 *Sea Σ un conjunto de fórmulas de un lenguaje $\mathcal{L}$. Diremos que una interpretación $\mathcal{V}$ de $\mathcal{L}$ es un* ***modelo*** *de Σ, si $\mathcal{V}(A) = T$ para toda fórmula $A \in \Sigma$.*

Existen conjuntos como $\Sigma = \{p_1 \Rightarrow p_3,\, p_1 \wedge \sim p_3\}$ que no tienen modelos.

Problema 4.2 *Sea $\Sigma = \{p_1 \Rightarrow \sim p_2,\, \sim p_3 \Rightarrow p_2,\, p_2 \wedge p_3\}$. Determine cuál de las siguientes interpretaciones es modelo de Σ y cuál no es. Explique su respuesta.*

1. *$\mathcal{V}(p_2) = F$, $\mathcal{V}(p_i) = T$, para cualquier $i \neq 2$.*
2. *$\mathcal{V}(p_1) = F$, $\mathcal{V}(p_i) = T$, para cualquier $i \neq 1$.*

4.2. Consecuencia Lógica

Definición 4.3 *Sea Σ un conjunto de fórmulas de un lenguaje $\mathcal{L}$. Diremos que una fórmula B de $\mathcal{L}$ es consecuencia lógica de Σ si cualquier interpretación de $\mathcal{L}$ que sea modelo de Σ es también modelo de B.*

La expresión $\Sigma \models B$ se lee "B es consecuencia lógica de Σ". Por abuso de lenguaje, diremos que $\Sigma \models B$ es un **razonamiento válido** si en efecto, B es consecuencia lógica de Σ.

Problema 4.4 *Determine si los siguientes razonamientos son válidos:*

1. $p_1 \Rightarrow \sim p_2,\ p_2 \wedge p_3 \models p_3 \Rightarrow p_2$
2. $p_2 \wedge p_3,\ p_3 \Rightarrow p_2 \models p_1 \Rightarrow \sim p_2$

Para resolver el problema propuesto conviene construír la tabla de verdad de las fórmulas que ocurren en cada enunciado; en nuestro caso, debemos considerar las fórmulas $p_1 \Rightarrow \sim p_2$, $p_2 \wedge p_3$, y $p_3 \Rightarrow p_2$.

Caso	p_1	p_2	p_3	$\sim p_2$	$p_1 \Rightarrow \sim p_2$	$p_2 \wedge p_3$	$p_3 \Rightarrow p_2$
1	T	T	T	F	F	T	T
2	T	T	F	F	F	F	T
3	T	F	T	T	T	F	F
4	T	F	F	T	T	F	T
5	F	T	T	F	T	T	T
6	F	T	F	F	T	F	T
7	F	F	T	T	T	F	F
8	F	F	F	T	T	F	T

Consideremos el razonamiento

$$p_1 \Rightarrow \sim p_2, p_2 \wedge p_3 \models p_3 \Rightarrow p_2$$

Como el único modelo de $p_1 \Rightarrow \sim p_2$, $p_2 \wedge p_3$ ocurre en el caso no. 5, y, puesto que, dicho caso es modelo de $p_3 \Rightarrow p_2$, podemos afirmar que el enunciado es válido.

Consideremos ahora el razonamiento

$$p_2 \wedge p_3,\ p_3 \Rightarrow p_2 \models p_1 \Rightarrow \sim p_2$$

Puesto que la interpretación dada por el caso no. 1 es modelo de las fórmulas $p_2 \wedge p_3$, $p_3 \Rightarrow p_2$ pero no es modelo de $p_1 \Rightarrow \sim p_2$, concluímos que dicho razonamiento no es válido.

4.3. Consistencia y Consecuencia lógica

A continuación señalamos cómo están ligadas las nociones de consecuencia lógica y consistencia de conjuntos.

Theorem 4.5 *Sea Σ un conjunto de fórmulas de un lenguaje $\mathcal{L}$. Entonces, son equivalentes:*

1. $\Sigma \models B$
2. *El conjunto $\Sigma \cup \{\sim B\}$ es inconsistente.*

Demostremos que, si $\Sigma \cup \{\sim B\}$ es inconsistente, entonces $\Sigma \models B$:

Demostración: Sea $\mathcal{I}$ un modelo de Σ; como $\Sigma \cup \{\sim B\}$ es inconsistente, $\mathcal{I}$ no puede ser modelo de $\sim B$; por lo tanto, $\mathcal{I}$ es modelo de B. ■

Por lo tanto, es importante el poder determinar si un conjunto de fórmulas es consistente.

Podemos emplear una tabla de verdad para decidir si un conjunto es inconsistente. (¿Cómo?)

Pero existen otros métodos con el mismo propósito; uno de tales métodos, el de las tablas semánticas, será presentado en la próxima sesión.