Lógica Formal 2018

Sesión 5: Tablas Semánticas

Profesor: Arsenio Cornejo *Escrito por: Arsenio Cornejo*

En esta sesión presentamos un método para determinar la validez de razonamientos.

Recordemos que, en la sesión anterior, presentamos el siguiente principio metalógico:

Sea $\Sigma \cup \{\phi\}$un conjunto de proposiciones lógicas; se tiene:

$$\Sigma \models \phi \quad sii \quad \Sigma \cup \{\sim \phi\} \text{ es inconsistente}$$

Si deseamos aplicar dicho principio para establecer, por ejemplo, que el razonamiento

$$p \vee q, \sim p, q \Rightarrow r \models r$$

es válido, debemos determinar si el conjunto $\{p \vee q, \sim p, q \Rightarrow r, \sim r\}$ es consistente; si no lo es, entonces el razonamiento es válido; en caso contrario, el razonamiento es inválido.

Sabemos que podemos emplear una tabla de verdad para decidir si un conjunto es o no consistente.

En esta sesión presentamos el método de las tablas semánticas con el mismo propósito.

En dicho método se parte de la hipótesis (reducción al absurdo), de que el conjunto $\{p \vee q, \sim p, q \Rightarrow r, \sim r\}$ es consistente, es decir, que existe algún modelo de dicho conjunto; las reglas que aplicamos tienen el propósito de calcular modelos (si existen) de dicho conjunto.

En el caso de que las reglas aplicadas, nos conduzcan a un absurdo, podemos conclúír que la hipotesis inicial, de que existía un modelo del conjunto, debe ser falsa; podremos entonces conclúír que el conjunto no tiene modelos, es decir, que es inconsistente; en consecuencia, aplicando el principio metalógico ya mencionado, podemos deducir que la conclusión es consecuencia lógica de las premisas.

5.1. Cálculo de Tablas Semánticas

Para una presentación inicial del método, calculemos la tabla semántica del conjunto

$$\Omega = \{p \vee q, \sim p, q \Rightarrow r, \sim r\}$$

1.		$\mathcal{T} :\, p \vee q$		Premisa
2.		$\mathcal{T} : \sim p$		Premisa
3.		$\mathcal{T} :\, q \Rightarrow r$		Premisa
4.		$\mathcal{T} : \sim r$		Neg. conclusión
5.	$\mathcal{T} :\, p$		$\mathcal{T} :\, q$	Por (1)
6.		$\mathcal{F} :\, q$	$\mathcal{T} :\, r$	Por (3)
7.		$\otimes$		
8.			$\mathcal{F} :\, r$	Por (4)
9.	$\mathcal{F} :\, p$		$\otimes$	Por (2)
	$\otimes$			

Observe que, en realidad, la tabla es un árbol, con tres ramas, cuya raíz es el conjunto Ω; estamos asumiendo que existe un modelo de Ω, es decir, una interpretación que satisface a cada fórmula del conjunto; si podemos determinar valores de verdad que deben tener las fórmulas atómicas p, q, y r, para satisfacer a cada fórmula del conjunto habremos demostrado que es consistente; de lo contrario, podremos afirmar que es inconsistente.

Examinemos en detalle, la tabla mostrada.

El paso No. 5 proviene de la premisa No. 1; de $p \vee q$ verdad se infiere que p es verdad o q es verdad; la rama que llega a $\mathcal{F} :\, p$ queda cerrada porque $\mathcal{T} :\, p$ también se encuentra en ella. El paso No. 6 proviene de la premisa No. 3, es decir, de $q \Rightarrow r$ verdad; se infiere que q es falsa o r es verdad. Quedan dos ramas por considerar, la que termina en $\mathcal{F} :\, q$ y la que termina en $\mathcal{F} :\, r$; la que termina en $\mathcal{F} :\, q$ está cerrada, porque en ella ocurre $\mathcal{T} :\, q$; por razones similares, la que termina en $\mathcal{F} : r$, también queda cerrada.

En conclusión, hemos logrado una **tabla semántica cerrada** del conjunto Ω; por lo tanto, dicho conjunto es inconsistente y, en consecuencia, el razonamiento

$$p \vee q,\, \sim p,\, q \Rightarrow r\, \models r$$

es válido.

Es conveniente especificar el nexo metalógico que existe entre consecuencia lógica y tablas cerradas; para ello, es conveniente apoyarnos en la terminología que describiremos a continuación.

En primer lugar, dada una fórmula A, llamaremos **fórmulas con signo**, a las expresiones de la forma $\mathcal{T} : A$ o $\mathcal{F}$; en particular, diremos que $\mathcal{T} : A$, y $\mathcal{F} : A$ son fórmulas de signos opuestos.

En segundo lugar, diremos que una rama está **cerrada**, si contiene fórmulas de signos opuestos.

Finalmente, diremos que una tabla semántica está **cerrada** si todas sus ramas están cerradas.

Observe que, para llegar a nuestra conclusión, en el ejemplo anterior, nos apoyamos en el siguiente principio:

> Sea $\Sigma \cup \{\sim \phi\}$ un conjunto de proposiciones lógicas; entonces
>
> $\Sigma \models \phi$ sii existe una tabla cerrada para el conjunto $\Sigma \cup \{\sim \phi\}$

En las próximas secciones detallaremos las reglas empleadas y mostraremos, cómo podemos emplearlas, para calcular tablas semánticas.

5.2. Cálculo de tablas semánticas

Al inicio de esta sesión introducimos el método de las tablas semánticas; las reglas que aplicamos en el ejemplo se encuentran en la tabla no. 5.1:

Reglas α	Reglas β
$\alpha\mathbf{1}: \begin{array}{c} \mathcal{T} : \sim A \\ \mid \\ \mathcal{F} : A \end{array}$	$\beta\mathbf{1}: \begin{array}{c} \mathcal{F} : A \wedge B \\ \swarrow \quad \searrow \\ \mathcal{F} : A \qquad \mathcal{F} : B \end{array}$
$\alpha\mathbf{2}: \begin{array}{c} \mathcal{F} : \sim A \\ \mid \\ \mathcal{T} : A \end{array}$	$\beta\mathbf{2}: \begin{array}{c} \mathcal{T} : A \vee B \\ \swarrow \quad \searrow \\ \mathcal{T} : A \qquad \mathcal{T} : B \end{array}$
$\alpha\mathbf{3}: \begin{array}{c} \mathcal{F} : A \vee B \\ \mid \\ \mathcal{F} : A \\ \mathcal{F} : B \end{array}$	$\beta\mathbf{3}: \begin{array}{c} \mathcal{T} : A \Rightarrow B \\ \swarrow \quad \searrow \\ \mathcal{F} : A \qquad \mathcal{T} : B \end{array}$
$\alpha\mathbf{4}: \begin{array}{c} \mathcal{T} : A \wedge B \\ \mid \\ \mathcal{T} : A \\ \mathcal{T} : B \end{array}$	$\beta\mathbf{4}: \begin{array}{c} \mathcal{T} : A \Leftrightarrow B \\ \swarrow \quad \searrow \\ \mathcal{T} : A \qquad \mathcal{F} : A \\ \mathcal{T} : B \qquad \mathcal{F} : B \end{array}$
$\alpha\mathbf{5}: \begin{array}{c} \mathcal{F} : A \Rightarrow B \\ \mid \\ \mathcal{T} : A \\ \mathcal{F} : B \end{array}$	$\beta\mathbf{5}: \begin{array}{c} \mathcal{F} : A \Leftrightarrow B \\ \swarrow \quad \searrow \\ \mathcal{T} : A \qquad \mathcal{F} : A \\ \mathcal{F} : B \qquad \mathcal{T} : B \end{array}$

Tabla 5.1: Reglas para tablas semánticas

5.3. Ejemplos de consecuencia lógica

A continuación consideramos algunos razonamientos clásicos; aplicaremos el método de tablas semánticas para demostrar que son válidos, es decir, que la conclusión es consecuencia lógica de las premisas.

Los razonamientos que consideramos son:

- Premisas: $\{A, A \Rightarrow B\}$; conclusión: B
- Premisas: $\{A \Rightarrow B, B \Rightarrow C\}$; conclusión: $A \Rightarrow C$

- Premisas: $\{A \Rightarrow B, \sim B\}$; conclusión: $\sim A$
- Premisas: $\{A \vee B, \sim A\}$; conclusión: B
- Premisas: $\{A \vee B, A \Rightarrow C, B \Rightarrow C\}$; conclusión: C

5.3.1. $A, A \Rightarrow B \models B$

1.	$\mathcal{T} : A$		Premisa
2.	$\mathcal{T} : A \Rightarrow B$		Premisa
3.	$\mathcal{F} : B$		Neg. conclusión
4.	$\mathcal{F} : A$	$\mathcal{T} : B$	Por (2)
	$\otimes$	$\otimes$	

5.3.2. $A \Rightarrow B, B \Rightarrow C \models A \Rightarrow C$

1.	$\mathcal{T} : A \Rightarrow B$			Premisa
2.	$\mathcal{T} : B \Rightarrow C$			Premisa
3.	$\mathcal{F} : A \Rightarrow C$			Neg. conclusión
4.	$\vert$			
5.	$\mathcal{T} : A$			$\alpha 5$, (3)
6.	$\mathcal{F} : C$			
7.	$\mathcal{F} : A$	$\mathcal{T} : B$		$\beta 3$, (1)
	$\otimes$			
8.		$\mathcal{F} : B$	$\mathcal{T} : C$	$\beta 3$, (2)
		$\otimes$	$\otimes$	

5.3.3. $A \Rightarrow B, \sim B \models \sim A$

1.	$\mathcal{T} : A \Rightarrow B$		Premisa
2.	$\mathcal{T} : \sim B$		Premisa
3.	$\mathcal{F} : \sim A$		Neg. conclusión
4.	$\mathcal{F} : A$	$\mathcal{T} : B$	$\beta 3$, (1)
5.	$\vert$	$\vert$	
6.	$\mathcal{F} : B$	$\mathcal{F} : B$	$\alpha 1$, (2)
7.	$\vert$	$\otimes$	
8.	$\mathcal{T} : A$		$\alpha 2$, (3)
	$\otimes$		

5.3.4. $A \vee B, \sim A \models B$

1.	$\mathcal{T}: A \vee B$		Premisa
2.	$\mathcal{T}: \sim B$		Premisa
3.	$\mathcal{F}: A$		Neg. conclusión
4.	$\mathcal{T}: A$	$\mathcal{T}: B$	$\beta 2$, (1)
5.	$\otimes$	|	
6.		$\mathcal{F}: B$	$\alpha 1$, (2)
		$\otimes$	

5.3.5. $A \vee B, A \Rightarrow C, B \Rightarrow C \models C$