Lógica Formal **2018**

Sesión 6: Lógica de Primer Orden

Profesor: Arsenio Cornejo *Escrito por: Arsenio Cornejo*

La lógica proposicional tiene aplicaciones interesantes y nos permiten plantear toda una serie de cuestiones importantes con respecto al análisis lógico de razonamientos.

Sin embargo el lenguaje en el que está basada, el lenguaje proposicional, no es suficiente para expresar ciertos razonamientos. Consideremos los siguientes:

R1

Enrique es un estudiante de segundo año de Informática.
Todos los estudiantes de segundo año de Informática estudian lógica.
Por lo tanto, Enrique estudia lógica.

R2

Enrique es un estudiante de segundo año de Informática.
Algunos estudiantes de segundo año juegan ajedrez.
Por lo tanto, Enrique juega ajedrez.

Parece natural clasificar al razonamiento **R1** como válido, y al **R2** como inválido.

Pero el lenguaje proposicional no nos permite expresar la estructura lógica de los enunciados, y, mucho menos, el determinar si, en efecto **R1** es válido y **R2** no lo es.

Nos interesa, por ejemplo, distinguir ente "Enrique estudia lógica", y "Enrique juega ajedrez".Podemos expresarlos en la forma

estudia(enrique, log)
y
juega(enrique ajedrez)

Estos son ejemplos de **fórmulas atómicas**; los nombres **estudia**, y **juega**, son símbolos de **predicados** de dos argumentos, y, el lenguaje al que pertenecen, es un **lenguaje de primer orden**.

Al formalizar los razonamientos obtenemos:

Premisas:
segundo(enrique)
$\forall x(segundo(x) \Rightarrow estudia(x, log))$
Conclusión:
$estudia(enrique, log)$
Formalización de R1

Premisas:
segundo(enrique)
$\exists y(segundo(y) \wedge estudia(y, ajedrez))$
Conclusión:
$juega(enrique, ajedrez)$
Formalización de R2

6.1. ¿Qué es un lenguaje de primer orden?

En la sección anterior presentamos un ejemplo de lenguaje de primer orden. Veamos en detalle sus elementos:

6.1.1. Alfabeto

Símbolos de constantes: enrique, log, ajedrez.
Simbolos de variables: x, y.
Símbolos de predicados: **segundo** (con un argumento),
estudia (con dos argumentos).
Símbolos de conectivas lógicas: $\wedge$, $\Rightarrow$
Símbolos de cuantificadores: $\forall$ (Todos...), $\exists$ (Algunos....)
Símbolos de puntuación: ' (', ') ', ','.

6.1.2. Fórmulas

Los enunciados que ocurren en los razonamientos corresponden a las *fórmulas* del lenguaje.

En nuestro lenguaje ocurren las *fórmulas atómicas* **segundo**(x), **segundo**(enrique), **estudia**(y, ajedrez) y **estudia**(y, log).

Las fórmulas se construyen a partir de las fórmulas atómicas, las conectivas lógicas y los cuantificadores.

A continuación definimos formalmente las nociones mencionadas.

Definición 6.1 (Términos) *Los términos de un lenguaje de primer orden son las variables y las constantes del lenguaje.*

Definición 6.2 (Fórmulas atómicas) *Las fórmulas atómicas son las expresiones de la forma* $p^n(t_1, \cdots t_n)$*, en donde* t_i*,* $i = 1, \cdots, n$ *son términos, y* p^n *es un símbolo de predicado de* n *argumentos.*

Definición 6.3 (Fórmulas) *El conjunto de las fórmulas de un lenguaje de primer orden, es el menor conjunto de expresiones de dicho lenguaje, que satisface las siguientes condiciones:*

1. *Las fórmulas atómicas son fórmulas .*
2. *Si* A*,* B*, son fórmulas, entonces,* $\sim A$*,* $A \vee B$*,* $A \wedge B$*,* $A \Rightarrow B$*, y* $A \Leftrightarrow B$ *son fórmulas .*
3. *Si* v *es una variable,* A *es una fórmula, entonces* $\forall xA$*,* $\exists xA$ *son fórmulas.*

Ejemplo 6.4 *Aplique la definición para demostrar que*

$$\forall x(P(x) \Rightarrow \exists y(\sim Q(x,y) \Rightarrow R(y))) \tag{6.1}$$

es una fórmula.

Demostración:

1	$Q(x,y)$	*Condición* (1)
2	$R(y)$	*Condición* (1)
3	$\sim Q(x,y)$	*Paso* [1], *Condición* (2)
4	$\sim Q(x,y) \Rightarrow R(y)$	*Pasos* [2,3], *Condición* (2)
5	$\exists y(\sim Q(x,y) \Rightarrow R(y))$	*Paso* [4], *Condición* (3)
6	$P(x)$	*Condición* (1)
7	$P(x) \Rightarrow \exists y(\sim Q(x,y) \Rightarrow R(y))$	*Pasos* [4,6], *Condición* (2)
8	$\forall x(P(x) \Rightarrow \exists y(\sim Q(x,y) \Rightarrow R(y)))$,	*Paso* [7], *Condición* (3)

La demostración muestra que en efecto la expresión

$$\forall x(P(x) \Rightarrow \exists y(\sim Q(x,y) \Rightarrow R(y))) \tag{6.2}$$

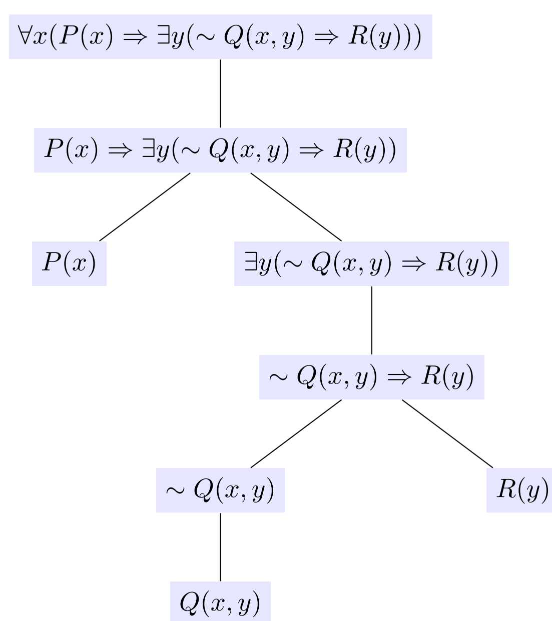
es una fórmula.

Los *diagramas estructurales* nos permiten representar las fórmulas en forma gráfica.

Por ejemplo, el diagrama estructural de la fórmula

$$\forall x(P(x) \Rightarrow \exists y(\sim Q(x,y) \Rightarrow R(y))) \tag{6.3}$$

Es el siguiente:



Se denominan **subfórmulas** de una fórmula dada a los nodos de su diagrama estructural.

Del diagrama se observa que

$$\forall x(P(x) \Rightarrow \exists y(\sim Q(x,y) \Rightarrow R(y)))$$

tiene 8 subfórmulas.

6.2. Clasificación de ocurrencias de variables

Las nociones de **variable ligada**, o **variable libre** cobran singular importancia al considerar la semántica de lenguajes de primer orden.

En esta sección nos ocupamos del tema.

Es posible que en una fórmula, ocurra una variable una o más veces; dichas ocurrencias pueden ser de dos tipos:

- ocurrencias libres
- ocurrencias ligadas

Definición 6.5 (Tipos de ocurrencias de variables) *Consideremos una fórmula A en la que ocurra una variable $\mathbf{x}$. Si existe alguna subfórmula de A de la forma $\forall \mathbf{x} B$, o, $\exists \mathbf{x} B$, tal que dicha ocurrencia sea en B, entonces diremos que es una ocurrencia **ligada** de $\mathbf{x}$; en caso contrario, diremos que es una **ocurrencia** libre de $\mathbf{x}$*

Consideremos una situación en la que sea necesario reconocer ocurrencias libres de variables.