Métricas y Topologías
Coloquios de Matemática

Arsenio Cornejo Jordán
Dept. de Matemática
Universidad de Panamá

noviembre 13, 2013

Temas

Introducción

En este coloquio relacionamos conceptos básicos de espacios métricos con los similares en espacios topológicos.

En particular, consideramos las nociones de topología, conjuntos cerrados y funciones continuas en espacios métricos, y luego las formulamos en el contexto de espacios topológicos.

Temas

Definición (Métrica)

Sea X un conjunto. Diremos que $d : X^2 \to \mathbb{R}$ es una métrica sobre X si satisface las siguientes propiedades:
(i) $d(x,y) \geq 0$ *for all* $x, y \in X$.
(ii) $d(x,y) = 0$ *if and only if* $x = y$.
(iii) $d(x,y) = d(y,x)$ *for all* $x, y \in X$.
(iv) $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$ *for all* $x, y, z \in X$.

Observación

Si d es una métrica sobre X, la estructura (X,d) se denomina espacio métrico. En aquellos casos en los que la referencia explícita a la métrica no sea necesaria, emplearemos el símbolo X para referirnos al espacio métrico.

Por definición, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua sobre $\mathbb{R}$ si, para todo $x \in \mathbb{R}$, y $\epsilon > 0$, existe algún $\delta(x, \epsilon) > 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon \text{ siempre que } |x - y| < \delta(x, \epsilon).$$

Métrica sobre $\mathbb{R}$:

$$d(x, y) = |x - y|, \qquad x, y \in \mathbb{R}$$

Definición (Continuidad en espacios métricos)

Sean (X, d), (Y, ρ) espacios métricos. Una función $f : X \to Y$ es continua si, dado $x \in X$ y $\epsilon > 0$, existe algún $\delta(x, \epsilon) > 0$ tal que

$$\rho(f(x), f(y)) < \epsilon \text{ siempre que } d(x, y) < \delta(x, \epsilon).$$

Definición

Sea (X, d) un espacio métrico. La bola abierta $B(x, r)$ con centro en $x \in X$ y radio $r > 0$ es el conjunto

$$B(x, r) = \{y : d(x, y) < r\}$$

Teorema (Continuidad y bolas abiertas)

Sean (X, d) and (Y, ρ) espacios métricos. Una función $f : X \to Y$ es continua si, y sólo si, dados $x \in X$, $\epsilon > 0$, existe algún $\delta(x, \epsilon) > 0$ tal que

$$f(B(x, \delta)) \subseteq (B(f(x), \epsilon)$$

Definition

Sea (X, d) un espacio métrico, $A \subseteq X$. Diremos que A es un conjunto abierto de X si, para todo $x \in A$, existe algún $r > 0$ tal que $B(x, r) \subseteq A$.

Teorema

[Continuidad y conjuntos abiertos] Sean (X, d) and (Y, ρ) espacios métricos. Una función $f : X \to Y$ es continua si, y sólo si, para todo conjunto abierto $B \subseteq Y$, se tiene que $f^{-1}(B)$ es un subconjunto abierto de X.

Demostración (I Parte)

$\models$ f es continua
$\Rightarrow$ Para todo abierto $B \subseteq Y$, $f^{-1}(B)$ es un abierto en X:
Sea $B \subseteq Y$ abierto, $x \in f^{-1}(B)$. Se tiene que $f(x) \in B$, y, como B es abierto, existe un $\epsilon > 0$ tal que $B(f(x), \epsilon) \subseteq B$. En adición, como f es continua existe un $\delta(x, \epsilon)$ tal que $f(B(x, \delta)) \subseteq B(f(x), \epsilon)$ lo que implica $B(x, \delta) \subseteq f^{-1}B$.

Demostración (II Parte)

$\models$ Para todo abierto $B \subseteq Y$, $f^{-1}(B)$ es un abierto en X
$\Rightarrow$ f es continua.
Sean $x \in X$, $\epsilon > 0$. Como $B(f(x), \epsilon)$ es abierto entonces, por la hipótesis, $f^{-1}B(f(x), \epsilon)$ es un abierto en X; sea $\delta(x, \epsilon)$ tal que $B(x, \delta) \subseteq f^{-1}B(f(x), \epsilon)$ resulta que $f(B(x, \delta) \subseteq B(f(x), \epsilon)$.

La familia de conjuntos abiertos satisface las propiedades que enunciamos a continuación:

Teorema

En todo espacio métrico X se tiene que:
(i) El conjunto vacío $\emptyset$ y el espacio X son abiertos.
(ii) La unión de toda familia de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.
(iii) La intersección de toda familia finita de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.

Definición

Sea X un espacio métrico , $F \subseteq X$. Diremos que $x \in X$ es un punto de acumulación de F si toda bola abierta, con centro en x, contiene al menos un punto de F distinto de x.

La condición mencionada puede expresarse en la forma:

$$(B(x,r) - \{x\}) \cap F \neq \emptyset$$

para toda bola abierta $B(x,r)$, $r > 0$.

Definición

Sea $\{x_n\}$ una sucesión de elementos en un espacio métrico X. Diremos que $\{x_n\}$ converge a $x_0 \in X$ si, para todo $\epsilon > 0$, existe $K \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > K \Rightarrow d(x_n, x_0) < \epsilon$$

Se escribe $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ si $\{x_n\}$ converge a x_0.

El siguiente teorema destaca una de las propiedades importantes de los puntos de acumulación.

Teorema

Sea X un espacio métrico, $F \subseteq X$. Entonces, $x_0 \in F$ es punto de acumulación de F si y sólo si existe una sucesión de puntos distintos $\{x_n\}$ en F tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$

La definición de conjunto cerrado requiere la noción de **punto de clausura**[1]

Definition

Sea X un espacio métrico, $F \subseteq X$. Diremos que $x \in X$ es un punto de clausura de F, si para toda bola abierta $B(x, r)$, se tiene que

$$B(x, r) \cap F \neq \emptyset$$

Puede afirmarse que todo punto de clausura de F está en F o es uno de sus puntos de acumulación.
Se presenta la definición de conjunto cerrado:

Definición (Conjunto cerrado)

Sea X un espacio métrico y $F \subseteq X$. Diremos que F es cerrado si contiene a todos sus puntos de clausura.

[1] Que en ocasiones se denomina puntos de adherencia

Teorema

Sea X un espacio métrico y $A \subseteq X$. Entonces, A es abierto si y sólo si su complemento $X - A$ es cerrado.

Demostración.

Sea $F \subseteq X$:
$\models$ A es abierto $\Rightarrow$ $X - A$ es cerrado.
Supongamos que $X - A$ no sea cerrado; ésto implica que existe un punto límite x_0 de $X - A$ que está en A; por lo tanto, $x_0 \in A$ pero no está en el interior de A. Luego A no es un conjunto abierto.
$\models$ $X - A$ es cerrado $\Rightarrow$ A es abierto.
Sea $x \in A$. Como $X - A$ es cerrado y $x \notin X - A$, existe una bola abierta $B(x, \delta)$ que satisface $B(x, r) \cap (X - A) = \emptyset$, es decir, $B(x, \delta) \subseteq A$. $\square$

Temas

La teoría de espacios topológicos está basada en los conceptos de conjunto abierto, función continua y conjunto cerrado formulados de modo que su definición no requiera la noción de distancia y de otros conceptos propios de la teoría de espacios métricos.

Del teorema **(3)** se tiene:

Definición

Sea X un conjunto y τ una colección de subconjuntos de X. Diremos que el par (X, τ) es un espacio topológico, o que τ es una topología en X, si τ goza de las siguientes propiedades:
(i) El conjunto vacío $\emptyset$ y el espacio X son elementos de τ.
(ii) La unión de toda familia de conjuntos en τ es elemento de τ.
(iii) La intersección de toda familia finita de conjuntos en τ es un elemento de τ.

Los elementos de τ son los **conjuntos abiertos** del espacio topológico (X, τ).

Del teorema **(2)** resulta:

Definición

Sean (X, τ) *and* (Y, ρ) *espacios topológicos. Una función* $f : X \to Y$ *es continua si, para todo conjunto abierto* $B \subseteq Y$*, se tiene que* $f^{-1}(B)$ *es un subconjunto abierto de* X*.*

El teorema **(5)** resulta en

Definición

Sea (X, τ) *un espacio topológico. Diremos que* $F \subseteq X$ *es cerrado si su complemento es un conjunto abierto.*

Conclusiones

En esta charla hemos mostrado cómo surgen nociones básicas de espacios topológicos de conceptos relacionados en espacios métricos. Creemos que existen diversos caminos para extender el proyecto sugerido.
Por ejemplo:

- ¿Es posible definir espacios métricos en otras formas?
- ¿ Es posible definir espacios topológicos en otras formas?
- ¿Existe relación entre los espacios así definidos? Por ejemplo, ¿es posible que espacios topológicos construídos en base a cierta estructura, resulten ser espacios métricos?
- ¿Qué tipo de convergencia puede existir en un espacio topológico?
- ¿Cómo se comparan los tipos de convergencia en espacios topológicos y en espacios métricos?

Referencias

- Garrett Birkhoff, *Moore-Smith convergence in general topology*, The Annals of Mathematics **38** (1937), no. 1, 39–56.
- Ryszard Engelking, *General topology*, Heldermann, 1989.
- Simmons, George Finlay y Hammitt, James K , *Introduction to topology and modern analysis*, McGraw-Hill New York, 1963.
- John L Kelley, *General topology*, van Nostrand Princeton, 1955.
- James R Munkres, *Topology*, vol. 2, Prentice Hall Upper Saddle River, 2000.
- Willard Stephen, *General topology*, Addison Wesley Publishing Company, 1970.

Muchas gracias